

## 2次元レイリー・ベナール対流解析コード

低マッハ数近似・次元あり（Julia 実装）

rayleigh\_benard\_lowmach\_dimensional.jl 処理内容の説明

### 目次

1	概要	2
2	支配方程式	2
2.1	低マッハ数近似の連続方程式	2
2.2	運動量方程式	2
2.3	エネルギー方程式（温度方程式）	2
2.4	無次元パラメータ	3
3	物理定数と計算条件	3
4	スタガード格子の配置	3
5	境界条件	4
5.1	速度境界条件	4
5.2	温度境界条件	4
6	PISO アルゴリズムの流れ	4
7	診断量：ヌッセルト数	6
8	出力	6
8.1	物理場の CSV 出力（save_fields）	6
8.2	ヌッセルト数履歴（save_nusselt）	6
8.3	コンソール出力	7
9	安定性条件のチェック	7
10	主な関数の一覧	7
11	実行方法	7
付録 A	密度変化ソース項 $S_T$ の導出	7
A.1	出発点：一般の圧縮性連続方程式	7
A.2	低マッハ数近似と状態方程式	8
A.3	密度の実質微分を温度で表す	8

---

A.4	温度方程式の代入 . . . . .	9
A.5	物理的意味 . . . . .	9
A.6	圧力ポアソン方程式への組み込み . . . . .	9

## 1 概要

本コードは、密度差による浮力が駆動力となる自然対流現象、**レイリー・ベナール対流** (Rayleigh–Bénard Convection) を2次元で数値シミュレーションする Julia プログラムである。作動流体として空気（理想気体）を用い、**低マッハ数近似** (Low-Mach Number Approximation) のもとで **SI 単位系の次元あり** 物理量を扱う。数値アルゴリズムの主な特徴を以下に示す。

- **低マッハ数近似**：熱力学的圧力  $p_0$ （空間一様・時間変動なし）と動的圧力  $p'$ （速度・密度変動に寄与）を分離する。密度は状態方程式  $\rho = p_0 / (R_{\text{gas}} T)$  で決定される。
- **PISO 法** (Pressure Implicit with Splitting of Operators)：圧力 – 速度連成を反復的に解くための分離型アルゴリズム。
- **スタガード格子** (Staggered Grid)： $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $p$  をそれぞれ異なる格子点に配置し、速度 – 圧力の空間的なデカップリングを防ぐ。
- **境界条件**：全壁すべりなし (no-slip), 下壁高温 ( $T_{\text{hot}}$ ), 上壁低温 ( $T_{\text{cold}}$ ), 側壁断熱 (Neumann)。

## 2 支配方程式

### 2.1 低マッハ数近似の連続方程式

低マッハ数近似では音波を除去するため、熱力学的圧力  $p_0$  を空間一様定数として扱う。理想気体の状態方程式は

$$\rho = \frac{p_0}{R_{\text{gas}} T} \quad (1)$$

となる。連続方程式（質量保存）は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = S_T \equiv \frac{\alpha \nabla^2 T}{T} \quad (2)$$

と非ゼロの発散源項  $S_T$  をもつ形になる。これは温度変化に伴う密度変化を表す。

### 2.2 運動量方程式

$x$  方向（水平）、 $y$  方向（鉛直上向き）の運動量方程式を以下に示す。

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (3)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + (\rho - \rho_{\text{ref}}) g \quad (4)$$

ここで  $\mu$  は動粘性率、 $g$  は重力加速度、 $\rho_{\text{ref}}$  は参照密度である。式 (4) 右辺第 3 項が**浮力項** (Boussinesq 型) であり、高温低密度域では上向き、低温高密度域では下向きの加速を生じる。

### 2.3 エネルギー方程式（温度方程式）

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (5)$$

ここで  $\alpha$  は熱拡散率（定数）である。

## 2.4 無次元パラメータ

$$\text{Ra} = \frac{g\beta(T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})L_y^3}{\nu\alpha} \quad (6)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (7)$$

ここで  $\beta = 1/T_{\text{ref}}$ （理想気体の体積膨張係数）、 $\nu = \mu/\rho_{\text{ref}}$  は動粘性係数、 $L_y$  は鉛直方向の領域高さである。

## 3 物理定数と計算条件

表1 物理定数・流体物性（空気、参照温度  $T_{\text{ref}} = 375 \text{ K}$ ）

パラメータ	記号	値	単位
重力加速度	$g$	9.81	$\text{m/s}^2$
気体定数（空気）	$R_{\text{gas}}$	287.0	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
定圧比熱	$c_p$	1005.0	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
下壁温度	$T_{\text{hot}}$	450.0	K
上壁温度	$T_{\text{cold}}$	300.0	K
熱力学的圧力	$p_0$	101325.0	Pa
参照密度	$\rho_{\text{ref}}$	$p_0/(R_{\text{gas}} T_{\text{ref}}) \approx 1.084$	$\text{kg/m}^3$
動粘性係数	$\nu$	$1.0 \times 10^{-2}$	$\text{m}^2/\text{s}$
熱拡散率	$\alpha$	$1.0 \times 10^{-2}$	$\text{m}^2/\text{s}$
熱伝導率	$\lambda$	0.0281	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$

表2 計算領域・格子・時間ステップ

パラメータ	記号	値	単位
$x$ 方向領域長さ	$L_x$	2.0	m
$y$ 方向領域長さ	$L_y$	1.0	m
$x$ 方向セル数	$N_x$	64	—
$y$ 方向セル数	$N_y$	32	—
時間刻み	$\Delta t$	$5 \times 10^{-4}$	s
終了時間	$t_{\text{end}}$	10.0	s
PISO 修正回数	$n_{\text{corr}}$	2	—
圧力 SOR 反復数	—	1500	—
SOR 緩和係数	$\omega$	1.6	—

## 4 スタガード格子の配置

本コードでは、圧力-速度のデカップリングを防ぐためにスタガード格子を採用している（図1参照）。各変数の配列サイズは以下の通りである。

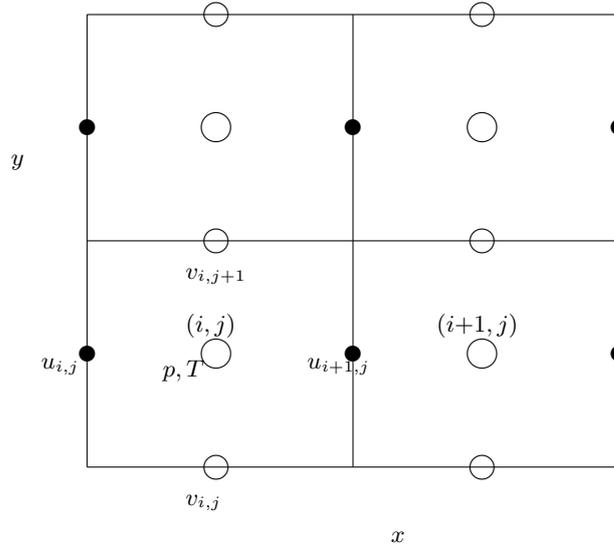


図1 スタガード格子の変数配置. ●:  $u$  ( $x$  方向速度, セル左右面中央), ○ (中空):  $v$  ( $y$  方向速度, セル上下面中央), ○ (太):  $p, T, \rho$  (セル中央).

- $u : (N_x + 1) \times N_y$  ( $x$  面,  $i = 1, \dots, N_x + 1$ )
- $v : N_x \times (N_y + 1)$  ( $y$  面,  $j = 1, \dots, N_y + 1$ )
- $p, T, \rho : N_x \times N_y$  (セル中央)

## 5 境界条件

### 5.1 速度境界条件

全壁面でのすべりなし・不透過条件を課す:

$$u|_{i=1, N_x+1} = 0, \quad v|_{j=1, N_y+1} = 0. \quad (8)$$

### 5.2 温度境界条件

温度のゴーストセル法により壁境界条件を実装する:

$$\text{下壁 (Dirichlet, 高温):} \quad T_{\text{ghost}} = 2T_{\text{hot}} - T_{i,1} \quad (9)$$

$$\text{上壁 (Dirichlet, 低温):} \quad T_{\text{ghost}} = 2T_{\text{cold}} - T_{i,N_y} \quad (10)$$

$$\text{左右壁 (Neumann, 断熱):} \quad T_{\text{ghost}} = T_{\text{boundary}} \quad (11)$$

## 6 PISO アルゴリズムの流れ

1 タイムステップの処理は以下の手順 (piso\_step! 関数) で実行される.

### ステップ 0: 密度の更新

理想気体の状態方程式 (1) を用いて全セルの密度を計算する. 続いて,  $u$  面・ $v$  面上への線形補間によりそれぞれの面中央密度  $\rho_u, \rho_v$  を求める:

$$\rho_{u,i,j} = \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i,j}}{2}, \quad \rho_{v,i,j} = \frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i,j}}{2}. \quad (12)$$

## ステップ 1：中間速度の計算

陽的 Euler 法により中間速度 ( $u^*$ ,  $v^*$ ) を計算する：

$$u^* = u^n + \Delta t \left[ -(\text{対流項}_x) + \nu \nabla^2 u^n - \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial p^n}{\partial x} \right] \quad (13)$$

$$v^* = v^n + \Delta t \left[ -(\text{対流項}_y) + \nu \nabla^2 v^n - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial p^n}{\partial y} + \frac{(\rho_{\text{ref}} - \rho_v) g}{\rho_v} \right] \quad (14)$$

対流項は中心差分，拡散項は2階中心差分で離散化される。 $u$  方程式は内壁スタガード点  $i = 2, \dots, N_x$ ， $v$  方程式は  $j = 2, \dots, N_y$  で計算し，壁面值はゼロ (no-slip) を直接設定する。

## ステップ 2：圧力修正ループ (PISO)

PISO 法では圧力修正を  $n_{\text{corr}}$  回繰り返す（本コードでは2回）。

### ■発散の計算

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}^*)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j}^*}{\Delta y} \quad (15)$$

### ■密度変化ソース項

$$S_{T,i,j} = \frac{\alpha \nabla^2 T}{T} \Big|_{i,j} \quad (16)$$

これは連続方程式 (2) の非ゼロ発散源項に対応する。

### ■圧力ポアソン方程式

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p' \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^* - S_T}{\Delta t} \quad (17)$$

式 (17) を，SOR 法（逐次過緩和法）により反復求解する：

$$p'_{i,j}{}^{(k+1)} = (1 - \omega) p'_{i,j}{}^{(k)} + \omega \frac{a_e p'_e + a_w p'_w + a_n p'_n + a_s p'_s - b_{i,j}}{a_e + a_w + a_n + a_s} \quad (18)$$

ここで係数は  $a_e = 1/(\rho_e \Delta x^2)$ ， $a_w = 1/(\rho_w \Delta x^2)$ ， $a_n = 1/(\rho_n \Delta y^2)$ ， $a_s = 1/(\rho_s \Delta y^2)$  であり， $\omega = 1.6$  は SOR 緩和係数である。全壁面での圧力修正量境界条件は Neumann 条件 ( $\partial p'/\partial n = 0$ ) とし，左下コーナーを基準点 ( $p' = 0$ ) として一意性を確保する。

### ■速度・圧力の修正

$$u_{i,j} \leftarrow u_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\rho_{u,i,j}} \frac{p'_{i,j} - p'_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (19)$$

$$v_{i,j} \leftarrow v_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\rho_{v,i,j}} \frac{p'_{i,j} - p'_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (20)$$

$$p \leftarrow p + p' \quad (21)$$

動的圧力  $p$  は空間平均ゼロになるよう毎ステップ基準化する。

## ステップ 3：温度方程式の前進

式 (5) を陽的1次精度風上差分で離散化する：

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \Delta t \left[ -u_c \delta_x T - v_c \delta_y T + \alpha \nabla^2 T \right]_{i,j}^n \quad (22)$$

対流項は速度の符号に応じた風上差分（1次精度）、拡散項は中心差分（2次精度）を用いる． $u_c, v_c$  はセル中央速度（スタガード速度の線形補間値）である．

## PISO アルゴリズムのフロー

**Step 1.** 状態方程式  $\rho = p_0/(R_{\text{gas}}T)$  で密度更新，面上密度を補間

**Step 2.** 中間速度 ( $u^*, v^*$ ) を陽的に計算

**Step 3.**  $n_{\text{corr}}$  回の PISO 修正ループ：

- a. 発散  $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$  を計算
- b. 密度ソース  $S_T$  を計算
- c. 圧力ポアソン方程式を SOR で解き  $p'$  を得る
- d.  $p \leftarrow p + p'$ ，速度を  $p'$  で修正

**Step 4.** 動的圧力を平均ゼロに基準化

**Step 5.** 温度方程式を 1 ステップ前進

## 7 診断量：ヌッセルト数

対流伝熱の強さを表す体積平均ヌッセルト数を以下の式で計算する：

$$\text{Nu} = 1 + \frac{\langle v' \theta \rangle}{\alpha \Delta T / L_y} \quad (23)$$

ここで  $\theta = (T - T_{\text{cold}})/(T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})$  は無次元温度， $\langle \cdot \rangle$  は体積平均， $\Delta T = T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}}$  である． $\text{Nu} = 1$  は純粋な熱伝導， $\text{Nu} > 1$  が対流伝熱の寄与を示す．

## 8 出力

### 8.1 物理場の CSV 出力 (save\_fields)

$n_{\text{save}} = 1000$  ステップごとに物理場スナップショットを CSV ファイルに保存する．

`rb_lowmach_dim_step{XXXXXX}.csv`

出力される列は以下の 7 項目である：

列名	内容
x[m]	$x$ 座標（セル中央） [m]
y[m]	$y$ 座標（セル中央） [m]
u[m/s]	$x$ 方向速度（セル中央補間値） [m/s]
v[m/s]	$y$ 方向速度（セル中央補間値） [m/s]
p[Pa]	動的圧力 [Pa]
T[K]	温度 [K]
rho[kg/m <sup>3</sup> ]	密度 [kg/m <sup>3</sup> ]

### 8.2 ヌッセルト数履歴 (save\_nusselt)

計算終了後に `nusselt_history.csv` としてヌッセルト数の時系列を保存する．

### 8.3 コンソール出力

各保存ステップでは以下の情報を標準出力に表示する：

- ステップ数・シミュレーション時刻
- ヌッセルト数  $Nu$
- 最大速度  $|u|_{\max}$ ,  $|v|_{\max}$
- 温度の最小・最大値
- 密度の最小・最大値
- 経過 CPU 時間

## 9 安定性条件のチェック

計算開始前に、推定自由対流速度スケール

$$u_{\text{scale}} = \sqrt{g \beta \Delta T L_y} \quad (24)$$

をもとに、CFL 数および拡散数を評価して警告を表示する：

$$C = \frac{u_{\text{scale}} \Delta t}{\min(\Delta x, \Delta y)} \leq 0.5 \quad (25)$$

$$D = \frac{\max(\nu, \alpha) \Delta t}{\min(\Delta x, \Delta y)^2} \leq 0.5 \quad (26)$$

## 10 主な関数の一覧

## 11 実行方法

Julia の REPL または以下のコマンドで実行する：

```
julia rayleigh_benard_lowmach_dimensional.jl
```

依存パッケージは標準ライブラリのみ (Printf, LinearAlgebra, Statistics) であり、追加インストールは不要である。

## 付録 A 密度変化ソース項 $S_T$ の導出

### A.1 出発点：一般の圧縮性連続方程式

質量保存則（圧縮性連続方程式）は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (27)$$

である。これを展開すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (28)$$

となり、実質微分  $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  を用いると

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (29)$$

表3 主な関数と役割

関数名	役割
compute_density!	理想気体状態方程式 $\rho = p_0/(R_{\text{gas}}T)$ で密度更新
interpolate_rho_u	$u$ 面上への密度の線形補間
interpolate_rho_v	$v$ 面上への密度の線形補間
apply_velocity_bc!	すべりなし速度境界条件の適用
get_T_extended	温度ゴーストセルの生成（壁温度・断熱境界）
compute_u_star!	中間速度 $u^*$ の計算（対流・拡散・圧力勾配項）
compute_v_star!	中間速度 $v^*$ の計算（浮力項を含む）
compute_divergence!	速度発散 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ の計算
compute_density_source!	密度変化ソース項 $S_T = \alpha \nabla^2 T/T$ の計算
solve_pressure_poisson!	SOR 法による圧力ポアソン方程式の求解
advance_temperature!	温度方程式の陽的前進（風上+中心差分）
pisso_step!	PISO アルゴリズム 1 ステップの統合処理
compute_nusselt	体積平均ヌッセルト数の計算
save_fields	物理場スナップショットの CSV 出力
save_nusselt	ヌッセルト数時系列の CSV 出力
main	初期化・メインループ・結果出力

## A.2 低マッハ数近似と状態方程式

低マッハ数近似では、熱力学的圧力  $p_0$  を空間一様・時間定数とみなす。理想気体の状態方程式は

$$\rho = \frac{p_0}{R_{\text{gas}} T} \quad (30)$$

である。  $p_0$  は定数であるから、  $\rho$  は  $T$  のみの関数となる：

$$\rho = \rho(T). \quad (31)$$

## A.3 密度の実質微分を温度で表す

式 (30) を時間微分する（流体粒子に追随した実質微分）：

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{p_0}{R_{\text{gas}} T} \right) = -\frac{p_0}{R_{\text{gas}} T^2} \frac{DT}{Dt}. \quad (32)$$

状態方程式 (30) を用いて  $p_0/(R_{\text{gas}} T) = \rho$  と置き換えると

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho}{T} \frac{DT}{Dt}. \quad (33)$$

これを式 (29) に代入すると

$$-\frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (34)$$

すなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt}. \quad (35)$$

#### A.4 温度方程式の代入

エネルギー方程式（温度方程式）は、粘性散逸・圧縮仕事を無視した低マッハ数近似のもとで

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (36)$$

と書ける（ $\alpha$  は熱拡散率）．式 (35) に式 (36) を代入すると、

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{T} \alpha \nabla^2 T = \frac{\alpha \nabla^2 T}{T} \equiv S_T} \quad (37)$$

が得られる．これが密度変化ソース項  $S_T$  の定義式である．

#### A.5 物理的意味

式 (37) は、**温度の拡散（ラプラシアン）が正の領域では流体が膨張し、負の領域では収縮すること**を意味する．具体的には以下のように解釈できる：

- $\nabla^2 T > 0$ （周囲より低温な領域，熱が流入）：温度上昇  $\Rightarrow$  密度低下  $\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} > 0$ （膨張）
- $\nabla^2 T < 0$ （周囲より高温な領域，熱が流出）：温度低下  $\Rightarrow$  密度上昇  $\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} < 0$ （収縮）

非圧縮性近似（ $\rho = \text{const}$ ）では  $S_T \equiv 0$  となり、 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  の通常非圧縮条件に戻る．低マッハ数近似はこの  $S_T \neq 0$  を許容することで**密度変化を伴う熱対流**を音波を含まずに正確に記述する．

#### A.6 圧力ポアソン方程式への組み込み

速度修正後に  $\nabla \cdot \mathbf{u} = S_T$  が成立するよう、圧力修正量  $p'$  のポアソン方程式は

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p' \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^* - S_T}{\Delta t} \quad (38)$$

と修正される（本文式 (17) 参照）．右辺の  $-S_T$  が低マッハ数近似特有の補正項であり、これを省略すると密度変化の効果が無視されて質量保存が破れる．